75.12/95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I

95.10 MODELACIÓN NUMÉRICA

GUÍA DE EJERCICIOS

Curso 005/002

Índice general

Capítulo 1

Errores y Representación Numérica

1. Identifique y describa las principales fuentes de error.

2. Desarrolle la propagación de los errores inherentes de las siguientes expresiones:

   a) $y = a + b$ *b*) $y = a - b$ *c*) $y = a \cdot b$ *d*) $y = \dfrac{a}{b}$

   e) $y = a^2$ *f*) $y = \sqrt{a}$ *g*) $y = \dfrac{1}{a}$

3. Obtenga los valores indicados utilizando las expresiones dadas y compare el resultado obtenido según se indica:

   a) Calcule $f(2)$ y compare el resultado con $\sqrt{2}$, aplicando la siguiente función:

   $$f(1+x) = 1 + \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{4 \cdot 2!} + \frac{3 \cdot x^3}{16 \cdot 4!} - \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot x^5}{32 \cdot 5!} - \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot x^6}{64 \cdot 6!}.$$

   b) Calcule $f\left(\frac{\pi}{10}\right)$ y compare con sen $\left(\frac{\pi}{10}\right)$, aplicando la siguiente función:

   $$f(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

   c) Con la misma función del punto anterior obtenga $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ y compare con sen $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y sen $\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Calcule los errores relativos.

4. Dada la siguiente función:

   $$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},$$

   que aproxima la función $\ln(1+x)$, ¿cuántos términos se deben considerar si se quiere aproximar $\ln(2)$ con $e_R < 10^{-4}$?

5. Hallar una cota del error de:

   $$f(x,y,z) = \frac{x \cdot y^2}{\sqrt{z}}$$

   si $x = 2{,}0 \pm 0{,}1$; $y = 3{,}1 \pm 0{,}2$ y $x = 1{,}0 \pm 0{,}1$.

6. Represente los resultados de las siguientes expresiones con cuatro decimales:

   a) $\sqrt{2}$ *b*) $2{,}1445 \cdot \pi$ *c*) $e^2 - \pi$ *d*) $\sqrt[3]{3}$.

   En lo casos *b)* y *c)*, primero represente los valores de π y e con cuatro decimales.

7. dada la ecuación de segundo grado, $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, con $a = 1$; $b = 62{,}10$ y $c = 1$. Si representa todos los números y los resultados intermedios y finales con notación de coma flotante con cuatro decimales y redondeo, aplique los algoritmos indicados y compare los resultados obtenidos:

   a) Algoritmo 1:
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

   b) Algoritmo 2:
$$x_1 = \frac{-2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

8. La función
$$P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5},$$
corresponde a los tres primeros términos no nulos de la serie de MacLaurin para la función $\operatorname{arc\,tg} x$. Calcule las siguientes expresiones usando $P(x)$ y solamente cinco decimales, y obtenga los errores absoluto y relativo, respecto de los valores obtenidos mediante las funciones incluidas en un programa como el MathCad, SMath Studio, Octave, MatLab, NumPy o similar.

$$a)\quad 4\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\right)\right] \qquad b)\quad 16\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\right) - 4\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{239}\right).$$

9. La Fórmula de Hudson es una de las expresiones utilizadas para el diseño y dimensionamiento de escolleras de talud tendido:
$$\frac{H_S}{\Delta\cdot D_n} = (K_D\cdot\cot\alpha)^{\frac{1}{3}},$$
donde H_S es la altura de ola significativa, $\Delta = \frac{\rho_M}{\rho_a} - 1$, ρ_M el peso específico del material de la coraza, ρ_a el peso específico del agua, D_n el diámetro o dimensión equivalente del bloque a utilizar en la coraza, K_D un coeficiente de forma y colocación y $\cot\alpha$ ($\cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$) la pendiente del talud. Si los valores datos son $\rho_M = 23{,}5\ \mathrm{kN/m^3}$, $\rho_a = 10{,}25\ \mathrm{kN/m^3}$, $H_S = 6{,}0\ \mathrm{m}$, $K_D = 9$ y $\cot\alpha = 2$, obtenga un valor de D_n si el error en la medición de la altura de ola significativa (H_S) es de $\pm 0{,}5$ m y todas las operaciones deben hacerse considerando solamente dos decimales.

10. Para la función del ejercicio 5, obtenga el C_p y el T_e mediante la aplicación de la gráfica de proceso.

11. Dada la fórmula del área de un anillo circular, $\pi\dot{(}R^2 - r^2)$, desarrolle la gráfica de proceso de los siguientes algoritmos:

   a) Algoritmo 1: $\pi\cdot(R\cdot R - r\cdot r)$;

   b) Algoritmo 2: $\pi\cdot(R - r)\cdot(R + r)$.

   Asuma $\pi = 3{,}14159$ e indique cual de los dos algoritmo es el más conveniente.

12. Mediante la aplicación de las perturbaciones experimentales, obtenga el C_p de:

   a) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$, con $x = 2{,}236$ y $\Delta x = 0{,}001$;

   b) $A = \pi\dot{(}R^2 - r^2)$, con $R = 20$, $r = 10$, $\Delta R = 0{,}2$ y $\Delta r = 0{,}1$;

c) $D_n = \frac{H_S}{\Delta \cdot (K_D \cdot \cot\alpha)^{\frac{1}{3}}}$.
Use los datos del ejercicio 9 de Representación numérica y considere una perturbación del 1 % para H_S y ρ_M.

13. La integral

$$y_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

con $n = 1; 2; 3; \ldots$, se puede aproximar con el siguiente algoritmo:

$$y_n = n \cdot y_{n-1} - \frac{1}{e}.$$

Analice la condición y la estabilidad del algoritmo para el caso de $n = 3$, si el valor inicial es $y_0 = 1 - \frac{1}{e}$.

Capítulo 2

Sistemas de Ecuaciones Lineales

2.1. Métodos Directos

2.1.1. Método de Eliminación de Gauss

1. Aplique el Método de Eliminación de Gauss para resolver los sistemas de ecuaciones indicados. No reordene las ecuaciones.

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= -9 \end{aligned}$$

2. Como en el ejercicio anterior, aplique el Método de Eliminación de Gauss para resolver los sistemas de ecuaciones lineales indicados. Determine si es necesario intercambiar filas.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

3. Aplique nuevamente el Método de Eliminación de Gauss y utilice solamente tres decimales en todas las operaciones para resolver los sistemas de ecuaciones lineales indicados a continuación:

$$\begin{aligned} 0{,}03x_1 + 58{,}9x_2 &= 59{,}2 \\ 5{,}31x_1 - 6{,}10x_2 &= 47{,}0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3{,}03x_1 - 12{,}1x_2 + 14x_3 &= -119 \\ -3{,}03x_1 + 12{,}1x_2 - 7x_3 &= 120 \\ 6{,}11x_1 - 14{,}2x_2 + 21x_3 &= -139 \end{aligned}$$

2.1.2. Factorización de matrices

1. Factorice las siguientes matrices aplicando la descomposición LU:

$$a)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad\qquad b)\ \begin{bmatrix} 1{,}012 & -2{,}132 & 3{,}104 \\ -2{,}132 & 4{,}096 & -7{,}013 \\ 3{,}104 & -7{,}013 & 0{,}014 \end{bmatrix}$$

2. Aplique el método de descomposición LU para resolver estos sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Factorice las siguientes matrices por el método de Cholesky

$$a)\ \begin{bmatrix} 5 & -3{,}2 & 0 \\ -3{,}2 & 6 & -2{,}7 \\ 0 & -2{,}7 & 4 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 4 & 2{,}25 & 1{,}275 & -1 \\ 2{,}25 & 6 & 3{,}875 & 1 \\ 1{,}275 & 3{,}875 & 8 & -2{,}5 \\ -1 & 1 & -2{,}5 & 9 \end{bmatrix}$$

4. Aplique los métodos de Factorización LU y de Cholesky para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Para el último, verificar que la matriz cumpla con las condiciones que impone el método.

$$a)\ \begin{bmatrix} 7\cdot 10^5 & -3{,}25\cdot 10^5 & 0 \\ -3{,}25\cdot 10^5 & 6\cdot 10^5 & -2{,}75\cdot 10^5 \\ 0 & -2{,}75\cdot{}^5 & 5\cdot 10^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$$

$$b)\ \begin{bmatrix} 6{,}8\cdot 10^3 & -4{,}08\cdot 10^3 & -3,4\cdot 10^3 & 0 \\ -4{,}08\cdot 10^3 & 6{,}8\cdot 10^3 & -2{,}04\cdot 10^3 & 0 \\ -3{,}4\cdot 10^3 & -2{,}04\cdot{}^3 & 1{,}19\cdot 10^4 & -1{,}088\cdot 10^4 \\ 0 & 0 & -1{,}088\cdot 10^4 & 1{,}19\cdot 10^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1{,}4 \end{bmatrix}$$

2.2. Métodos Iterativos

1. Aplique los métodos de *Jacobi*, *Gauss-Seidel*, *SOR* y *de los Gradientes Conjugados* (verificando las condiciones que debe cumplir la matriz A) para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\ \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$c)\ \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ -11 \end{bmatrix} \qquad d)\ \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Aplique los mismos métodos del punto anterior para resolver las ecuaciones del punto 4 de **Métodos Directos**.

Capítulo 3

Ecuaciones No Lineales – Sistemas de Ecuaciones No Lineales

3.1. Ecuaciones no lineales

3.1.1. Métodos de arranque

1. Obtenga la la raíz de las siguientes ecuaciones no lineales con una tolerancia $\varepsilon = 10^{-4}$, mediante el *Método de la Bisección*:

   a) $f(x) = x - \cos(x)$ en el intervalo $[0; 1]$

   b) $x\ \cos(x) = \ln(x)$ en el intervalo $[0; 1{,}6]$

2. Sea
$$f(x) = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1),$$
aplique el *Método de la Bisección* y el *Método de la Falsa Posición* o *Regula Falsi* para obtener las raíces en los intervalos $[-2; 1{,}5]$ y $[-1{,}25; 2{,}5]$ con una tolerancia $\varepsilon = 10^{-6}$.

3. Aplique los *Métodos de la Bisección* y de la *Falsa Posición* para obtener las raíces del siguiente polinomio:
$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 4,$$
e indique cuál de los métodos converge más rápido a la solución, si toma una tolerancia $\varepsilon = 10^{-6}$, para los siguientes intervalos: $[-2; -1]$, $[0; 2]$, $[2; 3{,}5]$ y $[-1; 0]$.

4. Encuentre una aproximación de $\sqrt{3}$ con una tolerancia $\varepsilon = 10^{-4}$ aplicando los *Métodos de la Bisección y de la Falsa Posición.* (Sugerencia: considere $f(x) = x^2 - 3$ y el intervalo $[0; 2]$.)

3.1.2. Métodos de refinamiento

Método de las Aproximaciones Sucesivas o del Punto Fijo

1. Efectúe cuatro iteraciones para obtener la raíz de la función $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$ en los intervalos $[-1; 0]$ y $[0; 2]$ con las funciones $g_i(x)$ que se proponen, aplicando el *Método de las Aproximaciones Sucesivas o de Punto Fijo*:

   a) $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{\frac{1}{4}}$

   b) $g_2(x) = \sqrt{\dfrac{3 + x - x^4}{2}}$

   c) $g_3(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x^2+2}}$

   d) $\dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$

(Sugerencia: verifique si las funciones $g_i(x)$ cumplen con las condiciones suficientes para su convergencia.)

2. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determine la función $g(x)$ y un intervalo $[a, b]$ que asegure la convergencia:

   a) $3x^2 - e^x = 0$ *b*) $x - \cos x = 0$ *c*) $x \operatorname{sen} x - \ln x = 0$.

3. Obtenga el valor de L, longitud de onda de una ola marítima, en la siguiente ecuación:

$$L = \frac{g\,T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi\,d}{L}\right),$$

   donde: g es la aceleración de la gravedad (9,81 $\mathrm{m/s^2}$), T es el período (8 s) y d es la profundidad del mar (7 m). Sugerencia: tome $L_0 = \frac{g\,T^2}{2\pi}$.

Método de Newton-Raphson

1. Obtenga la raíz de las siguientes ecuaciones mediante la aplicación del *Método de Newton-Raphson*:

   a) $f(x) = x^2 - 6$ y $x_0 = 1$;
   b) $f(x) = x^3 + \cos x$ y $x_0 = -1$;
   c) $f(x) = 3x^2 - e^x$ y $x_0 = 2$.

2. Obtenga las raíces de las ecuaciones siguientes con un precisión de 10^{-4}:

   a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ en $[0; 4]$;
   b) $x^3 - 3x^2 \cdot 2^{-x} + 3x \cdot 4^{-x} - 8^{-x} = 0$ en $[0, 1]$;
   c) $e^{6x} + 3 \cdot (\ln 2)^2 \cdot 3^{2x} - e^{4x} \cdot \ln 8 - (\ln 2)^3 = 0$ en $[-1; 0]$.

3. Obtenga la raíz cúbica de un número c. Sugerencia: considere $f(x) = x^3 - c = 0$.

Método de la Secante

1. Obtenga la raíz de las siguientes ecuaciones, mediante la aplicación del *Método de la Secante*:

   a) $f(x) = x^2 - 6$ y $x_0 = 1$;
   b) $f(x) = x^3 + \cos x$ y $x_0 = -1$;
   c) $f(x) = 3x^2 - e^x$ y $x_0 = 2$.

   Compare con los resultados obtenidos con el *Método de Newton-Raphson.*

2. Obtenga las raíces de las ecuaciones siguientes con un precisión de 10^{-4}:

   a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ en $[0; 4]$;
   b) $x^3 - 3x^2 \cdot 2^{-x} + 3x \cdot 4^{-x} - 8^{-x} = 0$ en $[0, 1]$;
   c) $e^{6x} + 3 \cdot (\ln 2)^2 \cdot 3^{2x} - e^{4x} \cdot \ln 8 - (\ln 2)^3 = 0$ en $[-1; 0]$.

   Compare con los resultados obtenidos con el *Método de Newton-Raphson.*

Método de Steffensen

1. Obtenga la raíz de las siguientes ecuaciones:
   a) $f(x) = x^2 - 6$ y $x_0 = 1$;
   b) $f(x) = x^3 + \cos x$ y $x_0 = -1$;
   c) $f(x) = 3x^2 - e^x$ y $x_0 = 2$.

   Compare con los resultados obtenidos con el *Método de Newton-Raphson* y el *Método de la Secante*.

2. Obtenga las raíces de las ecuaciones siguientes con un precisión de 10^{-4}:
   a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ en $[0; 4]$;
   b) $x^3 - 3x^2 \cdot 2^{-x} + 3x \cdot 4^{-x} - 8^{-x} = 0$ en $[0, 1]$;
   c) $e^{6x} + 3 \cdot (\ln 2)^2 \cdot 3^{2x} - e^{4x} \cdot \ln 8 - (\ln 2)^3 = 0$ en $[-1; 0]$.

   Compare con los resultados obtenidos con el *Método de Newton-Raphson* y el *Método de la Secante*.

3. Obtenga L de la ecuación del punto 3 de *Métodos de las Aproximaciones Sucesivas* y compare los resultados obtenidos.

Método de Halley

1. Obtenga la raíz de las siguientes ecuaciones mediante el *Método de Halley*:
   a) $f(x) = x^2 - 6$ y $x_0 = 1$;
   b) $f(x) = x^3 + \cos x$ y $x_0 = -1$;
   c) $f(x) = 3x^2 - e^x$ y $x_0 = 2$.

   Compare con los resultados obtenidos con el *Método de Newton-Raphson*, el *Método de la Secante* y el *Método de Steffensen*.

2. Obtenga las raíces de las ecuaciones siguientes con un precisión de 10^{-4}:
   a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ en $[0; 4]$;
   b) $x^3 - 3x^2 \cdot 2^{-x} + 3x \cdot 4^{-x} - 8^{-x} = 0$ en $[0, 1]$;
   c) $e^{6x} + 3 \cdot (\ln 2)^2 \cdot 3^{2x} - e^{4x} \cdot \ln 8 - (\ln 2)^3 = 0$ en $[-1; 0]$.

   Compare con los resultados obtenidos con el *Método de Newton-Raphson*, el *Método de la Secante* y el *Método de Steffensen*.

3.2. Sistemas de ecuaciones no lineales

1. Obtenga las raíces de este sistema de ecuaciones mediante el *Método de Newton*:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$f_2(x, y) = xy - 1 = 0$$

2. Obtenga las raíces de las siguientes ecuaciones:

   a) $$f_1(x) = 3x_1^2 - x_2^2 = 0 \qquad f_2(x) = 3x_1\,x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0$$

   b) $$f_1(x) = 4x_1^2 - 20x_1 + 0{,}25x_2^2 + 8 = 0 \qquad f_2(x) = 0{,}5x_1\,x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$$

   Para el caso *a*) tome $x^{<0>} = [1; 1]$ y para el caso *b*) tome $x^{<0>} = [0; 0]$. En ambos casos, tome $\varepsilon = 10^{-6}$.

3. Obtenga las raíces de los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a)
$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= x_1 + x_3 = 2 \\ f_2(\mathbf{x}) &= x_1\,x_2 + x_3\,x_4 = 0 \\ f_3(\mathbf{x}) &= x_1\,x_2^2 + x_3\,x_4^2 = \frac{2}{3} \\ f_4(\mathbf{x}) &= x_1\,x_2^3 + x_3\,x_4^3 = 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= x_1 + x_3 + x_5 = 2 \\ f_2(\mathbf{x}) &= x_1\,x_2 + x_3\,x_4 + x_5\,x_6 = 0 \\ f_3(\mathbf{x}) &= x_1\,x_2^2 + x_3\,x_4^2 + x_5\,x_6^2 = \frac{2}{3} \\ f_4(\mathbf{x}) &= x_1\,x_2^3 + x_3\,x_4^3 + x_5\,x_6^3 = 0 \\ f_5(\mathbf{x}) &= x_1\,x_2^4 + x_3\,x_4^4 + x_5\,x_6^4 = \frac{2}{5} \\ f_6(\mathbf{x}) &= x_1\,x_2^5 + x_3\,x_4^5 + x_5\,x_6^5 = 0 \end{aligned}$$

Considere que en *a)*, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, y en *b)*, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. En ambos casos, tome $\varepsilon = 10^{-6}$.

Capítulo 4

Interpolación y Ajuste de Curvas

4.1. Interpolación

4.1.1. Métodos de Lagrange tradicional y baricéntrico

1. Mediante la aplicación del *Método de Lagrange tradicional*:

   a) Obtenga $f(8{,}1)$, $f(8{,}4)$ y $f(8{,}5)$ a partir de los siguientes datos:

x	8,0	8,3	8,6	8,7
$f(x)$	16,94410	17,56492	18,50515	18,82091

   b) Obtenga $f(-0{,}6)$, $f(-0{,}4)$ y $f(-0{,}333333)$ a partir de los siguientes datos:

x	-0,75	-0,5	-0,25	0
$f(x)$	-0,07181250	-0,02475000	0,33493750	1,10100000

   c) Obtenga $f(0{,}15)$, $f(0{,}25)$ y $f(0{,}35)$ a partir de los siguientes datos:

x	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x)$	-0,62049958	-0,28398668	0,00660095	0,24842440

   d) Obtenga $f(1{,}03)$, $f(1{,}09)$ y $f(1{,}12)$ a partir de los siguientes datos:

x	1,00	1,05	1,10	1,15
$f(x)$	0,1924	0,2414	0,2933	0,3492

2. Verifique los resultados del ejercicio anterior aplicando el *Método de Lagrange Baricéntrico*.

4.1.2. Método de de las diferencias divididas de Newton

1. Aplique el *Método de las Diferencias Divididas Progresivas de Newton* con los datos del punto 4.1.1 para aproximar los siguientes valores:

   a) $f(8{,}2)$ y verifique $f(8{,}4)$ y $f(8{,}5)$.

   b) $f(-0{,}2)$ y verifique $f(-0{,}6)$ y $f(-0{,}333333)$.

   c) $f(0{,}15)$ y verifique $f(0{,}25)$ y $f(0{,}35)$.

d) $f(1{,}06)$ y verifique $f(1{,}09)$ y $f(1{,}12)$.

2. Aplique el *Método de las Diferencias Divididas Regresivas de Newton* para verificar los resultados obtenidos en el punto anterior.

4.1.3. Trazadores cúbicos

1. Verifique los resultados de los ejercicios anteriores aplicando el *Método de los Trazadores Cúbicos* con frontera libre.

2. Construya un polinomio interpolante mediante *Trazadores Cúbicos* de frontera libre para aproximar $f(x) = e^{-x}$ tomando los siguientes valores:

$$[0; f(0)], \quad [0{,}25; f(0{,}25)], \quad [0{,}5; f(0{,}5)], \quad [0{,}75; f(0{,}75)] \quad \text{y } [1{,}0; f(1{,}0)].$$

3. Repita el ejercicio anterior pero agregue como información $f'(0{,}0)$ y $f'(1{,}0)$ para construir una aproximación con *Trazadores Cúbicos* con frontera sujeta.

4.1.4. Método de Hermite

1. Obtenga el valor de $f(1{,}1$ y de $f(1{,}35)$ aplicando el *Método de Hermite* con los siguientes datos:

x	1,0	1,2	1,40	1,6
$f(x)$	1,35	1,45	1,55	1,65
$f'(x)$	-0,0004	0,0005	0,001	0

2. Obtenga un polinomio interpolante para aproximar $f(x) = e^{-x}$ aplicando el *Método de Hermite* con los siguientes datos:

x	0	0,25	0,50	0,75	1,0
$f(x)$	$f(0)$	$f(0{,}25)$	$f(0{,}50)$	$f(0{,}75)$	f(1,0)
$f'(x)$	$f'(0)$	$f'(0{,}25)$	$f'(0{,}50)$	$f'(0{,}75)$	f'(1,0)

3. Con los datos del punto anterior obtenga un polinomio interpolante aplicando el *Método de Hermite Segmentado*.

4.2. Ajuste de curvas – Método de los Cuadrados Mínimos

1. A partir de los datos de la siguiente tabla, obtenga las constante de la función de ajuste propuesta: $h(x) = a_0 + a - 1\,x + a_2\,x^2$.

X	1	2	3	4	5	6
Y	3,13	3,79	6,94	12,62	20,86	31,53

   Aplique un *Método Directo* para resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante.

2. Obtenga las constantes de la función de ajuste propuesta, $h(x) = a_0 + a_1\,e^x$, a partir de los siguientes datos y aplique un *Método Directo* para resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante

X	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Y	1,630	1,844	2,196	2,778	3,736	5,318

3. Con los datos de la siguiente tabla y aplicando el *Método de los Cuadrados Mínimos*, obtenga:

   a) Un polinomio de ajuste de segundo grado ($h(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2$).

   b) Un polinomio de ajuste de tercer grado ($h(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3$).

   c) Una función de ajuste $h(x) = a_0\, x^{a_1}$. (Sugerencia: use $h(x) = \ln a_0 + a_1\, \ln x$, transformando X en $\ln X$ y Y en $\ln Y$.)

   d) Una función de ajuste $h(x) = a_0\, e^{a_1\, x}$. (Sugerencia: use $h(x) = \ln a_0 + a_1\, x$, transformando Y en $\ln Y$.)

   Compare todos los resultados.

X	4,0	4,2	4,5	4,7	5,1	5,5	5,9	6,3	6,8	7,1
Y	102,56	1113,18	130,11	142,05	167,53	195,14	224,87	256,73	299,50	326,72

Capítulo 5

Diferenciación e Integración Numérica

5.1. Diferenciación numérica

1. Aproxime las derivadas primeras aplicando los *Métodos de Diferencias Progresiva y Regresiva* de orden 1 para completar la siguiente tabla de datos:

a)

x	$f(x)$	$f'(x)$
0,5	0,4794	
0,6	0,5646	
0,7	0,6442	

b)

x	$f(x)$	$f'(x)$
0,0	0,00000	
0,2	0,74140	
0,4	1,3718	

2. Aproxime las derivadas primeras aplicando los *Métodos de Diferencias Progresiva, Centrada y Regresiva* (todos de orden 2) para completar la tabla de datos el ejercicio anterior.

3. Aproxime las derivadas primeras aplicando los métodos necesarios para que el orden de convergencia sea 2, para completar la siguiente tabla de datos:

a)

x	$f(x)$	$f'(x)$
1,1	9,025013	
1,2	11,02318	
1,3	13,46374	
1,4	16,44465	

b)

x	$f(x)$	$f'(x)$
8,1	16,94410	
8,3	17,56492	
8,5	18,19056	
8,7	18,82091	

4. Aplique el método de *Extrapolación de Richardson* iterando hasta $N_3(h)$ para aproximar la derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \ln x$, para $x_0 = 2$ y $h = 0{,}4$;
   b) $f(x) = x + e^x$, para $x_0 = 0$ y $h = 0{,}4$;
   c) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$, para $x_0 = 2$ y $h = 0{,}2$;
   d) $f(x) = e^{-x} x^2$, para $x_0 = 3$ y $h = 0{,}1$.

5. A partir de los datos de la siguiente tabla, aproxime con las fórmulas adecuadas (que utilicen todos los datos disponibles) $f'(0{,}4)$, $f''(0{,}4)$, $f'(0{,}6)$ y $f''(0{,}6)$.

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$f(x)$	0,9798652	0,9177710	0,8080348	0,6386093	0,3843735

5.2. Integración numérica

5.2.1. Métodos de Newton-Cotes Cerrados

1. Aproxime las siguientes integrales aplicando el *Método del Trapecio*, el *Método de Simpson* y el *Método del Trapecio Mejorado*. Compare los resultados obtenidos.

   a) $\int_0^{10} 4\,x\,\mathrm{d}x$ *b)* $\int_1^5 (2\,x^2+7)\,\mathrm{d}x$ *c)* $\int_2^6 (3\,x^3+5)\,\mathrm{d}x$

   d) $\int_{-1}^2 (2{,}5\,x^4+3\,x)\,\mathrm{d}x$ *e)* $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$ *f)* $\int_{-2}^5 e^x\,\mathrm{d}x$

2. Aproximar nuevamente las integrales del punto anterior pero aplicando el *Método del Trapecio Compuesto*, el *Método de Simpson Compuesto* y el *Método del Trapecio Mejorado Compuesto*.

3. Repita el punto anterior pero aplicando el *Método de Romberg*.

5.2.2. Métodos de Newton-Cotes Abiertos

1. Aproxime las integrales del ítem 1 del punto anterior aplicando el *Método del Punto Medio* y la *Cuadratura de Gauss-Legendre*.

2. Aproxime las siguientes integrales mediante *Cuadratura de Gauss-Legendre*, eligiendo la cantidad de puntos necesarios para obtener un resultado «exacto»:

   a) $\int_{-1}^1 4\,x^7+5\,x^5\,\mathrm{d}x$ *b)* $\int_{-2{,}5}^{10} 10\,x^8+3\,x^2\,\mathrm{d}x$

5.2.3. Ejemplos de aplicación práctica

1. El *Método de los Elementos Finitos* aplicado al Análisis Estructural resuelve estructuras estáticas mediante la modelación de las estructuras con una malla discreta de elementos, que genera un sistema de ecuaciones lineales, usualmente definido como $K\,U=P$, donde la matriz K se denomina *matriz de rigidez*. Esta matriz se obtiene por la integración de cada una de sus componentes en un dominio dado, con ayuda de la *Cuadratura de Gauss-Legendre*. Como ejemplo de ello, calcule las componentes de una matriz de rigidez de dimensión 4×4 de manera de que el resultado de dichas integraciones sea «exacto».

$$K_{1;1}=\int_0^2\left(\frac{3}{2}-\frac{3\,x}{2}\right)^2\mathrm{d}x \qquad K_{1;2}=\int_0^2\left(\frac{3}{2}-\frac{3\,x}{2}\right)\left(2-\frac{3\,x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

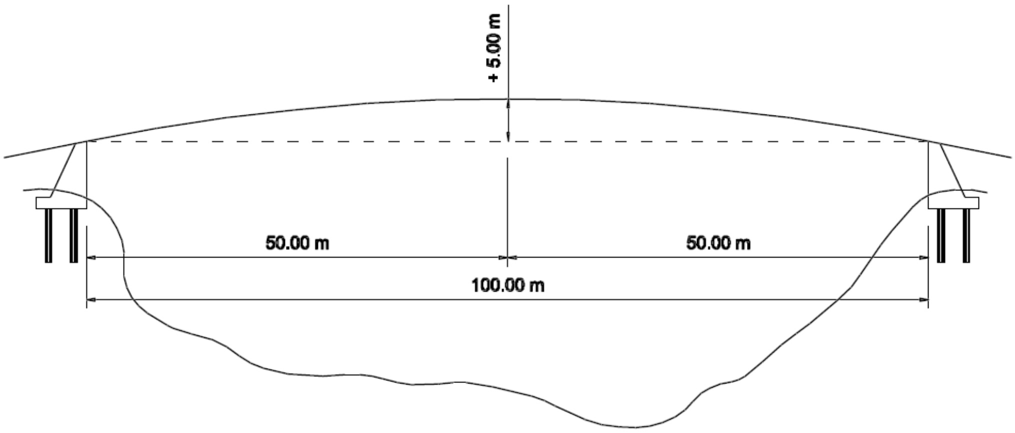
$$K_{1;3}=\int_0^2\left(\frac{3}{2}-\frac{3\,x}{2}\right)\left(\frac{3\,x}{2}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x \qquad K_{1;4}=\int_0^2\left(\frac{3}{2}-\frac{3\,x}{2}\right)\left(1-\frac{3\,x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$K_{2;2}=\int_0^2\left(2-\frac{3\,x}{2}\right)^2\mathrm{d}x \qquad K_{2;3}=\int_0^2\left(2-\frac{3\,x}{2}\right)\left(\frac{3\,x}{2}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$K_{2;4}=\int_0^2\left(2-\frac{3\,x}{2}\right)\left(1-\frac{3\,x}{2}\right)\mathrm{d}x \qquad K_{3;3}=\int_0^2\left(\frac{3\,x}{2}-\frac{3}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$K_{3;4}=\int_0^2\left(\frac{3\,x}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(1-\frac{3\,x}{2}\right)\mathrm{d}x \qquad K_{4;4}=\int_0^2\left(1-\frac{3\,x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

2. El tablero de un puente parabólico (polinomio de segundo grado) muestra una cota de+0,00 m en los extremos y una cota de +5,00 m en el centro. El puente se ha diseñado para cruzar un cañadón, para lo cual se ha considerado adecuado que la distancia entre apoyos (extremos) sea de 100 m. Determine la longitud del desarrollo del tablero.



5.3. Integrales Múltiples en forma numérica

1. Aplique el *Método de Simpson* para aproximar las siguientes integrales múltiples. Considere $m = n = 2$.
   a) $\int_{2,1}^{2,1} \int_{1,2}^{1,4} x\, y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$.
   b) $\int_{2}^{2,2} \int_{x}^{2x} \left(x^2 + y^2\right) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$.
   c) $\int_{0}^{0,5} \int_{0}^{0,5} e^{y-x} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$.
2. Aproxime las integrales del punto anterior pero considere $m = 4$ (Método de Simpson Compuesto) y $n = 2$.
3. Ídem el caso anterior pero con $n = 4$ (Método de Simpson Compuesto) y $m = 2$.
4. Ídem el caso 2 pero con $m = n = 3$.
5. Aproxime las integrales del punto 1 pero aplicando el *Método del Trapecio Compuesto* con $m = n = 4$.
6. Nuevamente aproxime las integrales del punto 1 aplicando *Cuadratura de Gauss-Legendre*:
   a) Con $m = n = 1$.
   b) Con $m = n = 2$.
   c) Con $m = n = 3$.

Capítulo 6

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

6.1. Con valores iniciales

6.1.1. Métodos de paso simple

1. Aplique el *Método de Euler Explícito* para aproximar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales con valor inicial:

   a) $y' = t\, e^{3\,t} - 2\,y$, con $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$ y $h = 0{,}5$.

   b) $y' = 1 + \dfrac{y}{t}$, con $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$ y $h = 0{,}25$.

   c) $y' = 1 + \dfrac{y}{t} + \left(\dfrac{y}{t}\right)$, con $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$ y $h = 0{,}2$.

   d) $y' = -(y+1)(y+3)$, con $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = -2$ y $h = 0{,}2$.

   e) $y' = -5\,y + 5\,t^2 + 2\,t$, con $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0{,}3333$ y $h = 0{,}1$.

2. Aproxime la solución de las ecuaciones del punto anterior aplicando el *Método de Euler Implícito*.

3. Con la soluciones analíticas de las ecuaciones del punto 1., compare los resultados obtenidos mediante la aplicación de los *Métodos de Euler* con los «exactos». Calcule el error absoluto y el error relativo de cada uno.

   a) $y(t) = \dfrac{1}{5}\,t\,e^{3\,t} - \dfrac{1}{25}(e^{3\,t} - e^{-2\,t})$.

   b) $y(t) = t\,\ln t + 2\,t$.

   c) $y(t) = t\,\operatorname{tg}(\ln t)$.

   d) $y(t) = -3 + \dfrac{2}{1 + e^{-2\,t}}$.

   e) $y(t) = t^2 + \dfrac{e^{-5\,t}}{3}$.

4. Dada la siguiente ecuación diferencial con valor inicial

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2 \qquad \text{con } 1 \leq t \leq 2 \text{ y } y(1) = -1,$$

   cuya solución analítica es

$$y(t) = -\frac{1}{t},$$

   a) Aplicar el *Método de Euler Explícito* con $h = 0{,}05$ para aproximar la solución.

   b) Ídem el punto anterior pero con el *Método de Euler Implícito*.

5. Aplique el *Método de Taylor de orden 2* para aproximar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales con valor inicial:

    a) $y' = t\,e^{3\,t} - 2\,y$, con $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$ y $h = 0{,}5$.
    b) $y' = 1 + \dfrac{y}{t}$, con $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$ y $h = 0{,}25$.
    c) $y' = 1 + \dfrac{y}{t} + \left(\dfrac{y}{t}\right)$, con $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$ y $h = 0{,}2$.
    d) $y' = -(y+1)(y+3)$, con $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = -2$ y $h = 0{,}2$.
    e) $y' = -5\,y + 5\,t^2 + 2\,t$, con $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0{,}3333$ y $h = 0{,}1$.

    Compare con los resultados obtenidos en los puntos 1 y 2.

6. Ídem el punto anterior pero con la ecuación diferencial del punto 4.

7. Aproxime las ecuaciones diferenciales del punto 1 aplicando el *Método del Punto Medio* (*Método de Runge-Kutta de orden 2*).

8. Ídem el punto anterior pero aplicando el *Método de Euler Modificado* (*Método de Runge-Kutta de orden 2*).

9. Ídem el punto anterior pero aplicando el *Método de Heun* (*Método de Runge-Kutta de orden 2*).

10. Ídem el punto anterior pero aplicando el *Método de Crank-Nicolson* (*Método de Runge-Kutta de orden 2*).

11. Ídem el punto anterior pero aplicando el *Método de Runge-Kutta de orden 3*.

12. Ídem el punto anterior pero aplicando el *Método de Runge-Kutta de orden 4*.

13. Arme un cuadro comparativo con todos las soluciones obtenidas para las ecuaciones diferenciales del punto 1.

6.1.2. Métodos multipasos

1. Aplique el *Método de Adams-Bashforth* de orden 2 para aproximar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales con valor inicial:

    a) $y' = t\,e^{3\,t} - 2\,y$, con $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$ y $h = 0{,}5$.
    b) $y' = 1 + \dfrac{y}{t}$, con $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$ y $h = 0{,}25$.
    c) $y' = 1 + \dfrac{y}{t} + \left(\dfrac{y}{t}\right)$, con $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 0$ y $h = 0{,}2$.
    d) $y' = -(y+1)(y+3)$, con $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = -2$ y $h = 0{,}2$.
    e) $y' = -5\,y + 5\,t^2 + 2\,t$, con $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0{,}3333$ y $h = 0{,}1$.

    Utilice soluciones obtenidas por algún *Método de Runge-Kutta* de orden para el valor de y_1.

2. Ídem el punto anterior pero aplicando el *Método de Adams-Moulton* de orden 2.

3. Aproxime las ecuaciones del punto 1 pero aplicando el *Método de Adams-Bashforth* de orden 4. Utilice las soluciones aproximadas con el *Método de Runge-Kutta* de orden 4 para los valores de y_1, y_2 y y_3.

4. Aproxime las ecuaciones del punto 1 pero aplicando el *Método de Adams-Moulton* de orden 4. Utilice las soluciones aproximadas con el *Método de Runge-Kutta* de orden 4 para los valores de y_1 y y_2.

6.1.3. Casos prácticos

1. Al mezclar dos fluidos, a veces, se originan ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Cuando se describe la mezcla de dos sales, se supone que la tasa con que cambia la cantidad de sal, $A'(t)$, en un tanque de mezcla, tiene una rapidez neta igual a:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = R_I - R_O,$$

donde R_I es la rapidez con que entra una sal, y R_O es la rapidez con que sale una sal. Suponiendo que:

$$R_I = 3 \text{ kg/min}, \quad R_O = \frac{\text{A}}{1000} \text{ kg/min}, \quad A(0) = 25 \text{ kg} \;\; \text{y } h = 10 \text{ min},$$

obtener una solución aproximada en el intervalo $0 \leq t \leq 100$ min aplicando:

   a) El *Método de Euler Explícito*,
   b) El *Método de Euler Implícito*,
   c) El *Método de Crank-Nicolson*,
   d) El *Método de Runge-Kutta* de orden 4.

Compare los resultados obtenidos con la solución analítica:

$$A(t) = 300 - 275\, e^{-\frac{t}{100}}.$$

2. Un modelo sencillo de «tsunami» está descripto por el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = H\,\sqrt{4 - 2\,H}, \quad \text{con} \quad H(0) = 2,$$

donde H es la altura de la ola y x es la posición del «tsunami» respecto del punto de origen. Obtenga una solución aproximada en el intervalo $0 \leq x \leq 10$ km, aplicando:

   a) El *Método de Euler Implícito*,
   b) El *Método de Crank-Nicolson*,
   c) El *Método de Adams-Moulton* de orden 4.

3. La cantidad $N(t)$ de hipermercados que usan cajas computarizadas en un país, está definida por el problema de valor inicial:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N(1 - 0{,}0005\,N), \quad \text{con} \quad N(0) = 1.$$

Obtenga una solución aproximada en el intervalo $0 \leq t \leq 10$ años, aplicando:

   a) El *Método de Euler explícito*,
   b) El *Método de Euler implícito*,
   c) El *Método de Crank-Nicolson*,
   d) El *Método de Runge-Kutta* de orden 4.

4. El modelo demográfico $P(t)$ de un suburbio en una gran ciudad está descripto por el problema de valor inicial:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = P(10^{-1} - 10^{-7}\,P), \quad \text{con} \quad P(0) = 5000,$$

donde t se expresa en meses. Obtenga una solución aproximada en el intervalo $0 \leq t \leq 10$ meses, aplicando:

a) El *Método de Euler Explícito*,

b) El *Método de Euler Mejorado*,

c) El *Método de Runge-Kutta* de orden 4,

d) El *Método de Adams-Bashforth* de orden 4.

5. Aplique el *Método de Euler Modificado* para aproximar las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden con valores iniciales:

   a) $y'' = t(e^t - 1) - y + 2\,y'$ con $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$, tomando $h = 0{,}1$;

   b) $y'' = t\,\ln t - \frac{2}{t}\left(\frac{y}{t} - y'\right)$ con $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 1$ y $y'(1) = 0$, tomando $h = 0{,}1$.

6. Aproxime las mismas ecuaciones del punto anterior pero aplicando el *Método de Runge-Kutta* de orden 4.

7. Un sistema masa–resorte con movimiento forzado amortiguado como representado en la figura 6.1, está descripto por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$0{,}2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 1{,}2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2\,x = 5\,\cos 4t,$$

en el intervalo $0 \leq t \leq 1{,}6$ con $x(0) = 0{,}5$ y $\dot{x}(0) = 0$.

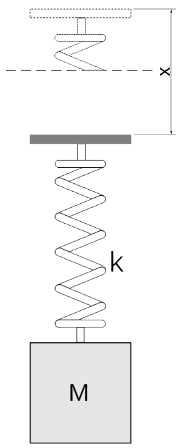


Figura 6.1: *Sistema masa-resorte.*

Aplique el *Método de Runge-Kutta* de orden 4 para obtener una aproximación de la solución.

6.2. Con condiciones de contorno

1. Se tienen dos esferas concéntricas de radio $r_0 = 25$ cm y $r_1 = 40$ cm, como se ve en la figura 6.2. La temperatura $T(r)$ en la región entre ambas esferas está determinada por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$r\,\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}r^2} + 2\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = 0.$$

Las condiciones de contorno son: $T_0 = T(25\text{ cm}) = 300$ K y $T_1 = T(40\text{ cm}) = 280$ K. Si $h = \frac{r_1 - r_0}{10}$, aplique el *Método de las Diferencias Finitas* para aproximar una solución del problema.

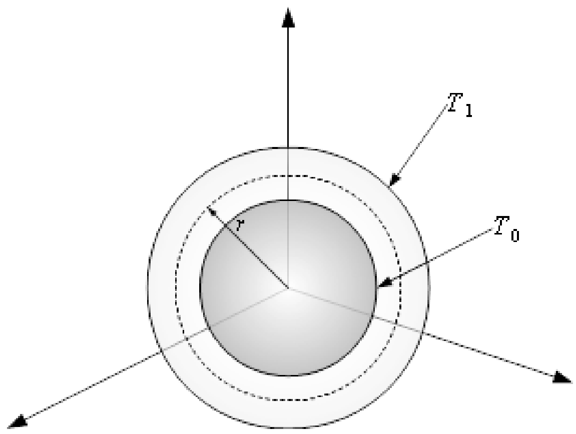


Figura 6.2: *Esferas concéntricas*

2. La ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = \frac{N \cdot M}{E \cdot I} - p\left[1 - 2\frac{x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right],$$

corresponde a la ecuación de equilibrio del sistema estructural de la figura 6.3.

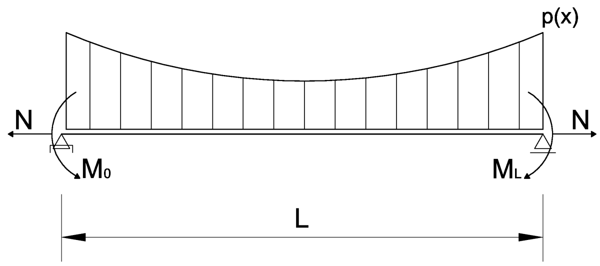


Figura 6.3: *Viga simplemente apoyada*

Para $x \in [0, 10\text{ m}]$, las siguientes condiciones de contorno, $M_0 = -0{,}10\text{ MNm}$, $M_L = -0{,}20\text{ MNm}$, el esfuerzo normal $N = 1{,}0\text{ MN}$ y los siguientes datos del material, $E = 206\text{ GPa}$, la sección transversal, $I = 0{,}001388\text{ m}^4$ y la carga externa, $p = 0{,}1\text{ MN/m}$, aproxime la solución del problema mediante el *Método de las Diferencias Finitas*, tomando $h = \dfrac{L}{10}$.

Bibliografía

[1] Akima, H. *A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures.* J.ACM, vol. 17, no. 4, pp. 589-602, 1970.

[2] Burden, R. L. & Faires, J. D. *Análisis Numérico.* Sexta Edición, International Thomson, 1998.

[3] Dennis Jr., J. E. & Morée, J. J. *Quasi-Newton methods, motivation and theory.* SIAM Review, Vol 19, No 1, pp. 46-89. January 1977.

[4] Ezquerro, J. A., Gutiérrez, J. M., Hernández, M. A. y Salanova, M. A. *El método de Halley: posiblemente el método más redescubierto del mundo.*Universidad de La Rioja, España. 2001

[5] Gavurin, M. K. *Conferencias sobre los métodos de cálculo.* Editorial Mir, 1973.

[6] Goldberg, D. *What every Computer Scientist should know about Floating-Point Arithmetic.* ACM Computing Surveys, March 1991.

[7] González, H. *Análisis Numérico, primer curso.* Primera Edición, Nueva Librería, 2002.

[8] Higham, N. J. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms.* SIAM, 1996.

[9] Higham, N. J. *How accurate is Gaussian Elimination.* Numerical Analysis 1989, Proceedings of the 13th Dundee Conference, volume 228 of Pitman research Notes in Mathematics.1990.

[10] Higham, N. J. *The numerical stability of barycentric Lagrange interpolation.* IMA Journal of Numerical Analysis. 2004.

[11] Marshall, G. *Solución numérica de ecuaciones diferenciales, Tomo I.* Editorial Reverté S.A., 1985.

[12] Saad, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems.* Second Edition, 2000.

[13] Samarski, A. A. *Introducción a los métodos numéricos.* Editorial Mir, 1986.

[14] Shewchuk, J. R. *An introduction to the Conjugate Gradient Method without the agonizing pain.* Edition $1\frac{1}{4}$. School of Computer Science. Carnegie Mellon University.

[15] Trefethen, L. N. *The Definition of Numerical Analysis.* SIAM News. November 1992.

[16] Trefethen, L. N. *Numerical Analysis.* Princeton Companion to Mathematics. 2008.

[17] Trefethen, L. N. & Berrut, J. P. *Barycentric Lagrange Interpolation.* 2004.

[18] Zill, D. G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Séptima Edición, International Thomson, 2002.